

Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda

Matěj Tušek

Katedra aplikované matematiky

Katedra matematiky

FIT ČVUT

FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

Obsah Cvičení

Předmluva	iii
1 Rozjezd	1
Sumační zápis, manipulace se sumami, důkaz matematickou indukcí, aritmetická a geometrická posloupnost, Pascalův trojúhelník, kombinační čísla.	
2 Funkce a jejich vlastnosti	7
Funkce, definiční obor, obor hodnot, vzor a obraz množiny, prostá funkce, složená funkce, inverzní funkce, elementární funkce.	
3 Posloupnosti	11
Posloupnosti, limita posloupnosti (definice a výpočet), vybraná posloupnost.	
4 Posloupnosti, pokračování	17
Věta o sevřené posloupnosti, Eulerovo číslo, podílové kritérium.	
5 Číselné řady	22
Opakování příkladů na limity, číselné řady.	
6 Limita funkce	26
Limita funkce; jednostranná limita; existence limity; výpočet limit.	
7 Spojitost a derivace funkce	31
Spojitost funkce; různé případy nespojitosti; derivace; výpočet derivace.	
8 Extrémy reálných funkcí	38
Extrémy reálných funkcí; vyšetřování průběhu reálných funkcí.	
9 L'Hospitalovo pravidlo, Taylorova věta, opakování	44
L'Hospitalovo pravidlo; Taylorova věta a její využití k přibližným výpočtům.	
10 Neurčitý integrál	49
Primitivní funkce, substituce, per partes.	

11 Určitý integrál

56

Riemannův určitý integrál; výpočet obsahů ploch ohraničených křivkami; objem a obsah rotačního tělesa; délka křivky.

Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora¹. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho [EDUXové stránce](#).

¹tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Cvičení č. 5

Číselné řady

Opakování příkladů na limity, číselné řady.

Na rozcvičení je možno zopakovat si výpočet limity posloupnosti na následujícím příkladě.

Příklad 5.1: Vypočítejte následující limity, případně dokažte jejich neexistenci.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 e^n - 2^n}{n^5 + 4^n},$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \right)^{n^2 + 2n},$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n^2 + n},$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + (-1)^n)n.$

a) 0, b) e^{-1} , c) 1, d) $+\infty$.

Na tomto příkladě demonstrujeme definici konvergence číselné řady.

Příklad 5.2: U následujících řad $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ nejprve najděte částečný součet $s_n = \sum_{k=k_0}^n a_k$ a rozhodněte o konvergenci, případně nalezněte součet.

- a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)},$
- b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k},$
- c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$

Řešení.

a) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{1+n}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1,$$

řada konverguje a její součet je 1.

b) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k + 2^k}{6^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

řada konverguje a její součet je $\frac{7}{2}$.

c) Pro částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1,$$

řada konverguje a její součet je 1.

Vyjma definice máme k vyšetřování (absolutní) konvergence číselných řad z přednášky k dispozici následující kritéria:

- nutnou podmínku konvergence,
- Leibnizovo kritérium,
- d'Alembertovo kritérium,
- srovnávací kritérium.

Příklad 5.3: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2^{-k}),$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} k3^{-k},$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{2^k}.$

Řešení.

a) Řada diverguje. Není splněna nutná podmínka konvergence. Zde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + 2^{-k}) = 1 \neq 0.$$

b) Řada konverguje, lze použít d'Alembertova kritéria:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)3^{-k-1}}{k3^{-k}} = \frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{3} < 1.$$

c) Řada absolutně konverguje, použijeme srovnávací kritérium:

$$\text{pro } k \in \mathbb{N} \text{ je } |\sin(k) \cdot 2^{-k}| \leq 2^{-k} \quad \text{a řada } \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \text{ konverguje.}$$

Poznamenejme, že v tomto případě nelze použít d'Alembertovo kritérium.

Příklad 5.4: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2},$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}),$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$

Řešení.

a) Diverguje, protože

$$\frac{1+k}{1+k^2} \geq \frac{1+k}{2k^2} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k}$$

pro každé $k = 1, 2, 3, \dots$ a o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ z přednášky víme, že diverguje.

b) Diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence.

c) Lze použít d'Alembertovo kritérium k vyšetření absolutní konvergence a ukázat konvergenci řady.

Příklad 5.5: Rozhodněte o konvergenci následujících řad.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + (-1)^k) \frac{1}{2^k},$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k},$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!},$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + 3^{2k}},$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k}}{2^k + 3^k}$

Řešení. V prvním příkladě lze použít srovnávací kritérium, v ostatní d'Alembertovo. Výsledky:
a) konverguje, b) konverguje, c) diverguje, d) konverguje, e) diverguje.

Domácí cvičení 5.6: Vyšetřete konvergenci následujících řad

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} 2^k,$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} k^{30} 3^{-k}$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 3}{k^4 + 3}$$

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1+k}{1+k^2}.$$

a) diverguje, b) konverguje, c) diverguje, d) konverguje.