

# Cvičení k předmětu BI-ZMA

Tomáš Kalvoda

Matěj Tušek

Katedra aplikované matematiky

Katedra matematiky

FIT ČVUT

FJFI ČVUT

Zimní semestr akademického roku 2013/2014

30. ledna 2014

## Obsah Cvičení

<b>Předmluva</b>	<b>iii</b>
<b>1 Rozjezd</b>	<b>1</b>
Sumační zápis, manipulace se sumami, důkaz matematickou indukcí, aritmetická a geometrická posloupnost, Pascalův trojúhelník, kombinační čísla.	
<b>2 Funkce a jejich vlastnosti</b>	<b>7</b>
Funkce, definiční obor, obor hodnot, vzor a obraz množiny, prostá funkce, složená funkce, inverzní funkce, elementární funkce.	
<b>3 Posloupnosti</b>	<b>11</b>
Posloupnosti, limita posloupnosti (definice a výpočet), vybraná posloupnost.	
<b>4 Posloupnosti, pokračování</b>	<b>17</b>
Věta o sevřené posloupnosti, Eulerovo číslo, podílové kritérium.	
<b>5 Číselné řady</b>	<b>22</b>
Opakování příkladů na limity, číselné řady.	
<b>6 Limita funkce</b>	<b>26</b>
Limita funkce; jednostranná limita; existence limity; výpočet limit.	
<b>7 Spojitost a derivace funkce</b>	<b>31</b>
Spojitost funkce; různé případy nespojitosti; derivace; výpočet derivace.	
<b>8 Extrémy reálných funkcí</b>	<b>38</b>
Extrémy reálných funkcí; vyšetřování průběhu reálných funkcí.	
<b>9 L'Hospitalovo pravidlo, Taylorova věta, opakování</b>	<b>44</b>
L'Hospitalovo pravidlo; Taylorova věta a její využití k přibližným výpočtům.	
<b>10 Neurčitý integrál</b>	<b>49</b>
Primitivní funkce, substitute, per partes.	

## 11 Určitý integrál

56

Riemannův určitý integrál; výpočet obsahů ploch ohraničených křivkami; objem a obsah rotačního tělesa; délka křivky.

## Předmluva

Tento dokument slouží jako osnova cvičení k předmětu BI-ZMA. Jeho cílem je pochopení a osvojení si látky probírané na přednáškách. Každá kapitola obsahuje vždy několik typických řešených příkladů na dané téma a další příklady k procvičení či k samostnému počítání.

V případě nejasností týkajících se tohoto textu kontaktuje autora<sup>1</sup>. Podrobné informace o předmětu BI-ZMA lze dále nalézt na jeho [EDUXové stránce](#).

---

<sup>1</sup>[tomas.kalvoda@fit.cvut.cz](mailto:tomas.kalvoda@fit.cvut.cz)

# Cvičení č. 6

## Limita funkce

Limita funkce; jednostranná limita; existence limity; výpočet limit.

### Značení

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  ..... limita funkce  $f$  v bodě  $a$   
 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c$  ..... limita funkce  $f$  v bodě  $a$  zprava  
 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c$  ..... limita funkce  $f$  v bodě  $a$  zleva

Na přednášce se limita reálné funkce reálné proměnné definovala následovně: Necht funkce  $f$  je definována na okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$  s možnou výjimkou bodu  $a$  samotného a necht  $c \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f$  má v bodě  $a$  limitu  $c$ , pokud pro každé okolí  $H_c$  bodu  $c$  existuje okolí  $H_a$  bodu  $a$  tak, že pokud  $x \in H_a \setminus \{a\}$  pak  $f(x) \in H_c$ .

K výpočtu limit máme nyní k dispozici věty o limitách součtu, součinu, podílu, složené funkce a Heineho větu. Dále máme z přednášky odvozené limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Také již můžeme využívat spojitost exponenciály, logaritmu, sinu, kosinu... Někteří už na přednášce měli, jiní mít teprve budou.

**Příklad 6.1:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$$

*Řešení.* Jelikož  $-1$  je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli, musíme vytknout výraz  $(x+1)$ , na tomto místě si připomeňte dělení polynomu polynomem.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} = \frac{1}{3}.$$

**Příklad 6.2:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

6.

**Příklad 6.3:** Pomocí definice vypočtěte limity

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{1}{x}.$$

*Řešení.* Na této limitě znovu demonstrujeme definici. Buď  $H_{+\infty}(c) = (c, +\infty)$  zadané okolí  $+\infty$ ,  $c > 0$ . Položme  $\delta = \frac{1}{c}$ . Potom pro  $x \in H_0^+(\delta) \setminus \{0\} = (0, \delta)$  platí  $0 < x < \delta$  a proto  $\frac{1}{x} > c$ , čili  $\frac{1}{x} \in H_{+\infty}(c)$  a

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Podobně lze nalézt druhou limitu,

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

**Příklad 6.4:** Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}.$$

$+\infty$ .

**Příklad 6.5:** Vypočtěte limity

$$\lim_{x \rightarrow 1_{\pm}} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3}.$$

*Řešení.* Po úpravě

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{x - 1} \cdot \frac{x^2 + x - 6}{x - 3}$$

ihned uzavíráme

$$\lim_{x \rightarrow 1_{\pm}} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \pm\infty \cdot \frac{1 + 1 - 6}{-2} = \pm\infty.$$

**Příklad 6.6:** Vypočtěte limity:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^x.$$

*Řešení.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Jako argument lze použít známé číselné limity  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ , resp.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ , monotonii  $e^x$  a Heineho větu. Načrtněte též průběh exponenciály.

**Příklad 6.7:** Vypočtěte limity:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

*Řešení.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x \cdot (1 + e^{-x}))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} \ln(1 + e^{-x}) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 0.$$

**Příklad 6.8:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}.$$

*Řešení.* Pomocí věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1.$$

Navíc jsme použili znalost jedné z limit uvedené na začátku této kapitoly, teď je vhodný čas tyto limity připomenout, protože budou potřeba dále.

**Příklad 6.9:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}.$$

3.

**Příklad 6.10:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{4x}}{x}.$$

-1.

**Příklad 6.11:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}.$$

5.

**Příklad 6.12:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}.$$

$\frac{2}{3}$ .

**Příklad 6.13:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$\frac{1}{2}$ .

**Příklad 6.14:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

*Řešení.* Zde máme k dispozici větu o limitě sevřené funkce. Jelikož

$$\forall x > 0 : -\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$$

a obě mezní funkce mají stejnou (nulovou) limitu, je nulová i limita hledaná.

**Příklad 6.15:** Vypočtěte jednostranné limity:

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{1 - x}.$$

*Řešení.*

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{1 - x} = \mp \frac{\pi}{2}.$$

Pro ilustraci načrtněte graf funkce  $\operatorname{arctg} x$ .

**Domácí cvičení 6.16:** Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\frac{\pi}{2}$ .

**Domácí cvičení 6.17:** Vypočtěte limity

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12},$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 4x^2 + x + 6},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}},$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}.$

a)  $-3$ , b)  $-\infty$ , c)  $\frac{1}{2}$ , d)  $e$ .

**Domácí cvičení 6.18:** Vypočtěte limity

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x} (2 \sin(x) + x),$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(2x)},$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(x)}.$

a)  $3$ , b)  $-1$ , c)  $\frac{1}{2}$ , d)  $2$ .

**Domácí cvičení 6.19:** Vypočtěte limity

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1},$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right),$

a)  $+\infty$ , b)  $0$ , c)  $0$ .

**Domácí cvičení 6.20:** Vypočtěte limity

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \right),$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos(2x)},$

c)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e},$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}.$

a) 0, b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , c)  $\frac{1}{e}$ , d)  $\frac{3}{2}$ .