

Základy matematické analýzy

Použití integrálu

Ing. Tomáš Kalvoda, Ph.D.¹, Ing. Daniel Vašata²

¹`tomas.kalvoda@fit.cvut.cz`

²`daniel.vasata@fit.cvut.cz`

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

30. ledna 2014
ZS 2013/2014



Hlavní body

1 Výpočet ploch a objemů rotačních těles

2 Délka křivky

3 Celková změna a okamžitá změna

4 Gaussovský filtr, vyhlazování

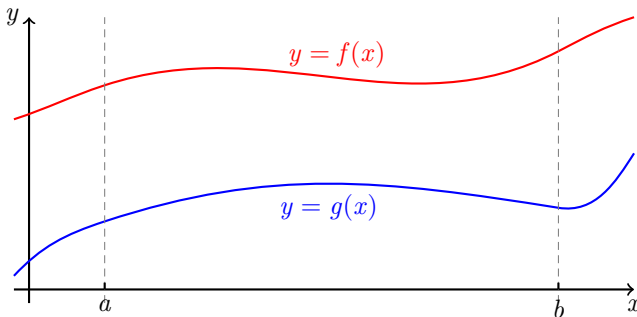


Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b \rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

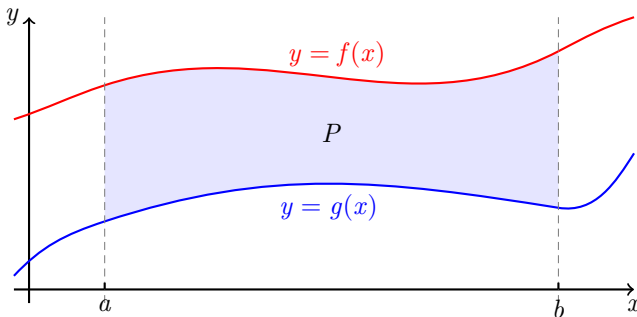


Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b \rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$



Příklad.

Vypočtete obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .



Příklad.

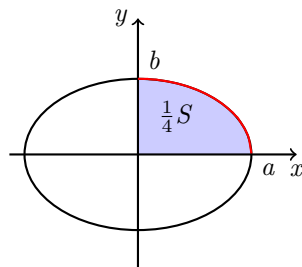
Vypočtete obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .



Příklad.

Vypočtete obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .

Rovnice elipsy zní $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vrchní oblouk elipsy je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a \rangle$.



Příklad.

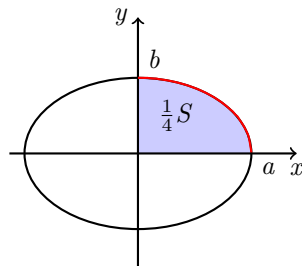
Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .

Rovnice elipsy zní $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vrchní oblouk elipsy je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a \rangle$.

Tudíž, použijeme-li substituci $x = a \sin t$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}S &= \int_0^a f(x)dx = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \\ &= b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a \cos(t)dt = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{4}ab.\end{aligned}$$

Dostáváme $S = \pi ab$.



Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

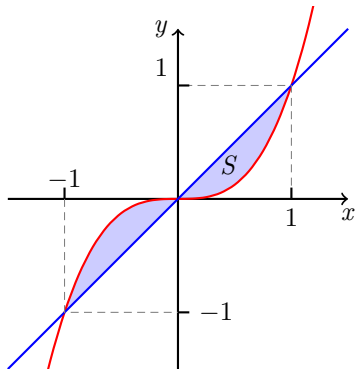


Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1, 1), (1, 1) \text{ a } (0, 0).$$



Příklad.

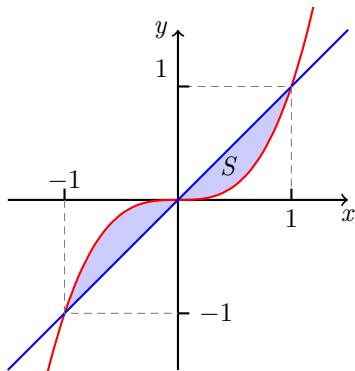
Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1, 1), (1, 1) \text{ a } (0, 0).$$

Z náčrtku (resp. průběhu) je pak patrné, že obsah plochy je

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Příklad.

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

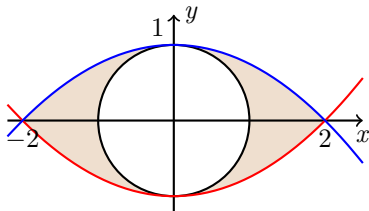


Příklad.

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Obsah útvaru bez vyjmuté kružnice je



$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) dx = \\ & 2 \int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 dx = 2 \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Takže plocha našeho útvaru je

$$S = \frac{16}{3} - \pi.$$



Výpočet objemu rotačního tělesa

Věta:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak objem V rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x je

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



Výpočet objemu rotačního tělesa

Věta:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak objem V rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x je

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



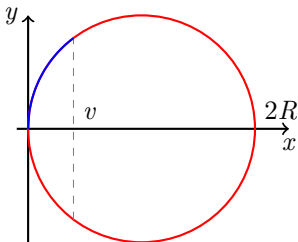
Příklad.

Vypočtete objem kulového vrchlíku o výšce $0 < v < R$ useknutého z koule o poloměru R .



Příklad.

Vypočtete objem kulového vrchlíku o výšce $0 < v < R$ useknutého z koule o poloměru R .



Vrchlík získáme rotací grafu funkce

$$f(x) = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} = \sqrt{2xR - x^2}$$

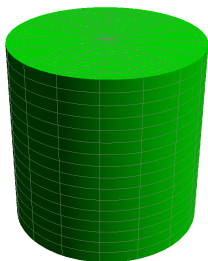
na intervalu $\langle 0, v \rangle$. Proto

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^v (2xR - x^2) dx = \pi \left[x^2 R - \frac{x^3}{3} \right]_0^v = \\ &= \pi v^2 \left(R - \frac{v}{3} \right). \end{aligned}$$



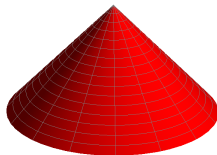
Další známá rotační tělesa

Válec



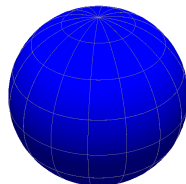
$$V = \pi v r^2$$

Kužel



$$V = \frac{\pi}{3} r^2 v$$

Koule



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



Příklad.

Vypočtěte objem koule o poloměru $r > 0$.



Příklad.

Vypočtete objem koule o poloměru $r > 0$.

Za f volíme

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad D_f = \langle -r, r \rangle.$$

Potom podle vzorce

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$



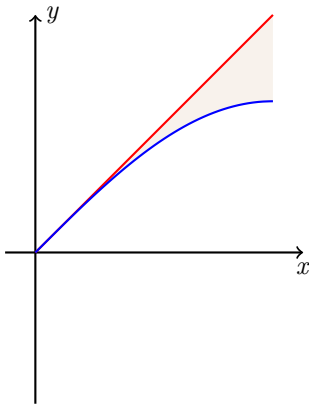
Příklad.

Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací oblasti mezi grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$.



Příklad.

Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací oblasti mezi grafy funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$.



Celkový objem získáme jako rozdíl dvou objemů

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/2} x^2 dx - \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right). \end{aligned}$$



Obsah pláště rotačního tělesa

Věta:

Nechť funkce f je diferencovatelná na $\langle a, b \rangle$ a nechť $f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$ je funkce spojitá na tomto intervalu. Pak obsah pláště P rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx.$$



Příklad.

Vypočtete povrch koule o poloměru r .



Příklad.

Vypočtete povrch koule o poloměru r .

Použijeme stejnou funkci f jako při výpočtu objemu, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Její derivace,

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$



Příklad.

Vypočtete povrch koule o poloměru r .

Použijeme stejnou funkci f jako při výpočtu objemu, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Její derivace,

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Sice není omezená na $\langle -r, r \rangle$, ale

$$f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = r.$$



Příklad.

Vypočtete povrch koule o poloměru r .

Použijeme stejnou funkci f jako při výpočtu objemu, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Její derivace,

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Sice není omezená na $\langle -r, r \rangle$, ale

$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = r.$$

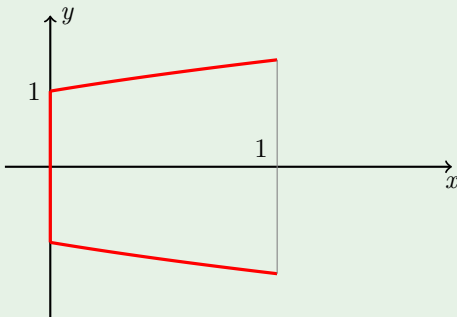
Povrch koule tedy je

$$P = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 4\pi r^2.$$



Příklad.

Vypočtete povrch rotačně symetrické nádoby s průřezem

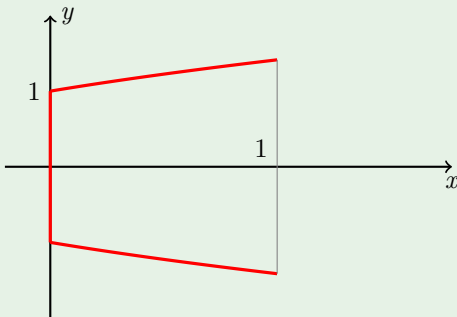


Kde stěna je udána grafem funkce $f(x) = \sqrt{x+1}$ nad intervalem $\langle 0, 1 \rangle$.



Příklad.

Vypočtěte povrch rotačně symetrické nádoby s průřezem



Kde stěna je udána grafem funkce $f(x) = \sqrt{x+1}$ nad intervalem $\langle 0, 1 \rangle$.

Nezapomeňme započítat i podstavu

$$S = \pi + 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4(x+1)}} dx.$$



Integrand lze po několika přímočarých operacích zjednodušit na

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{5+4x} \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \frac{1}{4} (5+4x)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{12} (27 - 5^{3/2}).$$

Takže povrch nádoby je

$$S = \pi + \frac{\pi}{6} (27 - 5^{3/2}).$$



Hlavní body

- 1 Výpočet ploch a objemů rotačních těles
- 2 **Délka křivky**
- 3 Celková změna a okamžitá změna
- 4 Gaussovský filtr, vyhlazování



Definice:

Bud'te f a g dvě spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom zobrazení $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

nazýváme křivkou v \mathbb{R}^2 .



Definice:

Budte f a g dvě spojitě funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom zobrazení $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

nazýváme křivkou v \mathbb{R}^2 .

Poznámka:

Symbol v v definici představuje uspořádanou dvojici dvou reálných čísel (bod v \mathbb{R}^2). Zobrazení F tedy každému $t \in \langle a, b \rangle$ přiřadí $F(t)$, bod v rovině \mathbb{R}^2 .



Definice:

Budte f a g dvě spojitě funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom zobrazení $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

nazýváme křivkou v \mathbb{R}^2 .

Poznámka:

Symbol v definici představuje uspořádanou dvojici dvou reálných čísel (bod v \mathbb{R}^2). Zobrazení F tedy každému $t \in \langle a, b \rangle$ přiřadí $F(t)$, bod v rovině \mathbb{R}^2 .

Příklad.

Jako příklad uvažme kružnici, kdy $\langle a, b \rangle = \langle 0, 2\pi \rangle$ a $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$.



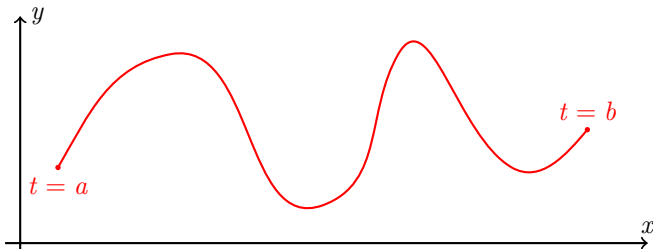
Délka grafu funkce

Definice:

Pro křivku F v \mathbb{R}^2 a rozdělení $\sigma = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ položme

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.$$

Toto číslo nazýváme **délkou lomené čáry** aproximující křivku F při rozdělení σ .



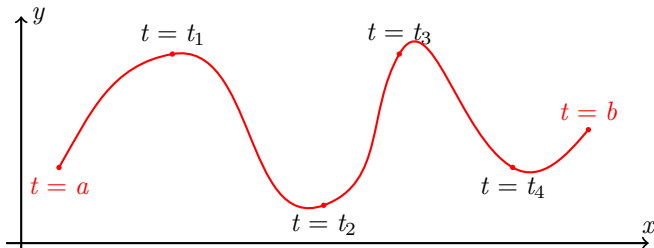
Délka grafu funkce

Definice:

Pro křivku F v \mathbb{R}^2 a rozdělení $\sigma = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ položme

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.$$

Toto číslo nazýváme **délkou lomené čáry** aproximující křivku F při rozdělení σ .



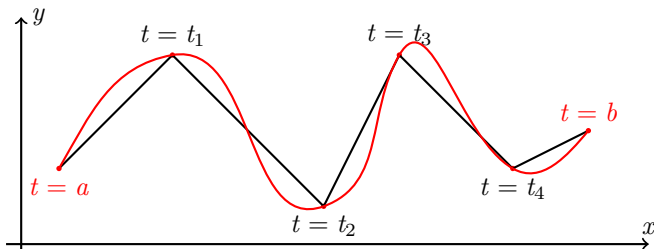
Délka grafu funkce

Definice:

Pro křivku F v \mathbb{R}^2 a rozdělení $\sigma = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ položme

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.$$

Toto číslo nazýváme **délkou lomené čáry** aproximující křivku F při rozdělení σ .



Věta:

Je-li F křivka v \mathbb{R}^2 , $F(t) = (f(t), g(t))$ a funkce f a g jsou spojitě diferencovatelné na $\langle a, b \rangle$, pak pro libovolnou normální posloupnost rozdělení σ intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje konečná limita

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\sigma_n) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

Číslo L nazýváme **délkou křivky** F .



Poznámka (Délka grafu funkce):

Graf funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definované na intervalu $\langle a, b \rangle$ lze chápat jako křivku

$$F(x) = (x, f(x)), \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Je-li f diferencovatelná, pak pro **délku grafu funkce** f platí

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$



Příklad.

Vypočtete délku úseku paraboly $y = x^2$ mezi body $(0, 0)$ a $(1, 1)$.



Příklad.

Vypočtete délku úseku paraboly $y = x^2$ mezi body $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Jedná se o délku grafu funkce $f(x) = x^2$ definované na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Takže pomocí per partes odvodíme

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \left[x\sqrt{1 + 4x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + 4x^2 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = \\ &= \sqrt{5} - L + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx. \end{aligned}$$



Příklad.

Vypočtete délku úseku paraboly $y = x^2$ mezi body $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Jedná se o délku grafu funkce $f(x) = x^2$ definované na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Takže pomocí per partes odvodíme

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \left[x\sqrt{1 + 4x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + 4x^2 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = \\ &= \sqrt{5} - L + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx. \end{aligned}$$

Po vyjádření L a substituci dostáváme

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} dy = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(2 + \sqrt{5} \right),$$

kde jsme dále použili již vypočtený neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C.$$



Příklad.

Vypočtěte délku křivky

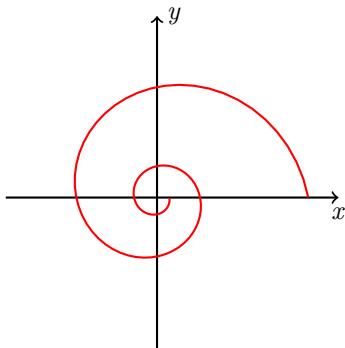
$$F(t) = \left(e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t) \right), \quad t \in \langle 0, 4\pi \rangle.$$



Příklad.

Vypočtěte délku křivky

$$F(t) = \left(e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t) \right), \quad t \in \langle 0, 4\pi \rangle.$$



Podle vzorce platí

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{4\pi} \left[\left(-e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t) \right)^2 \right]^{1/2} dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2e^{-2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} e^{-t} dt \\ &= \sqrt{2} \left[-e^{-t} \right]_0^{4\pi} = \sqrt{2} (1 - e^{-4\pi}). \end{aligned}$$



Hlavní body

- 1 Výpočet ploch a objemů rotačních těles
- 2 Délka křivky
- 3 Celková změna a okamžitá změna
- 4 Gaussovský filtr, vyhlazování



Poznámka:

Uvažme funkci f diferencovatelnou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Derivaci $f'(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, interpretujeme jako okamžitou změnu f v čase t . Celková změna f mezi okamžiky $t = a$ a $t = b$ je dána

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$



Poznámka:

Uvažme funkci f diferencovatelnou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Derivaci $f'(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, interpretujeme jako okamžitou změnu f v čase t . Celková změna f mezi okamžiky $t = a$ a $t = b$ je dána

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Příklad.

Označuje-li $x(t)$ polohu bodu pohybujícího se po přímce v čase $t \in \mathbb{R}$, pak $x'(t)$ představuje jeho okamžitou rychlost v čase t a změna polohy mezi časy 0 a 1 je

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 x'(t) dt.$$

Okamžitá změna rychlosti, $x''(t)$, se nazývá zrychlení.



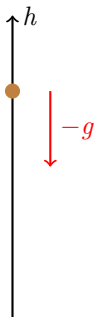
Příklad.

Z mostu nad řekou upustíme kámen a za 5.6 sekundy uslyšíme jak dopadne do vody. Jaká je výška mostu?



Příklad.

Z mostu nad řekou upustíme kámen a za 5.6 sekundy uslyšíme jak dopadne do vody. Jaká je výška mostu?



Označme vertikální polohu kamene v čase t jako $h(t)$, hladině odpovídá $h = 0$. Při volném pádu je kámen urychlován pouze gravitačním zrychlením, tedy

$$h''(t) = -g$$

Počáteční polohou je neznámá výška mostu $h(0) = H > 0$ a počáteční rychlostí je $h'(0) = 0$. Rychlost v okamžiku t je tedy

$$h'(t) = h'(0) + \int_0^t h''(s) ds = 0 + [-gs]_0^t = -gt.$$



Poloha kamene v čase t je pak

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s) ds = H - g \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^t = H - \frac{1}{2} g t^2.$$

Mezi okamžikem dopadu a okamžikem kdy dopad uslyšíme uplyne čas $\frac{H}{v_z}$, kde $v_z \approx 343.2 m/s$ je rychlost zvuku.



Poloha kamene v čase t je pak

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s) ds = H - g \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^t = H - \frac{1}{2} g t^2.$$

Mezi okamžikem dopadu a okamžikem kdy dopad uslyšíme uplyne čas $\frac{H}{v_z}$, kde $v_z \approx 343.2 m/s$ je rychlost zvuku. Dopadl-li kámen v čase T , pak $h(T) = 0$, tedy $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Celkem

$$T + \frac{H}{v_z} = 5.6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{v_z} = 5.6 \quad \Rightarrow \quad H + v_z \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{H} - 5.6 \cdot v_z = 0$$

a proto $H = 133.2m$.



Příklad.

Nechť v nádobě je 1 litr vody v okamžiku $t = 0$ a je poté napouštěna rychlostí $3t^2 - 2t + 3$ litrů vody za minutu. Voda z nádoby vytéká trhlínou rychlostí 2 litry za minutu. Kolik je v nádobě vody po třech minutách?



Příklad.

Nechť v nádobě je 1 litr vody v okamžiku $t = 0$ a je poté napouštěna rychlostí $3t^2 - 2t + 3$ litrů vody za minutu. Voda z nádoby vytéká trhlinou rychlostí 2 litry za minutu. Kolik je v nádobě vody po třech minutách?

Označme objem vody v nádobě v čase t symbolem $V(t)$. Podle zadání je $V(0) = 1$ litr. Změna množství vody je

$$V'(t) = 3t^2 - 2t + 3 - 2 = 3t^2 - 2t + 1.$$

Takže množství vody v nádobě po třech minutách je

$$\begin{aligned} V(3) &= V(0) + \int_0^3 (3t^2 - 2t + 1) dt = 1 + \left[t^3 - t^2 + t \right]_0^3 = \\ &= 1 + 27 - 9 + 3 = 22 \text{ litrů.} \end{aligned}$$



Hlavní body

- 1 Výpočet ploch a objemů rotačních těles
- 2 Délka křivky
- 3 Celková změna a okamžitá změna
- 4 Gaussovský filtr, vyhlazování



Zobecněný Riemannův integrál

- Pro spojitou reálnou funkci f na \mathbb{R} zkoumejme limitu

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

Pokud tento součet limita existuje, nezávisí na c a je konečný, pak ho nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** a značíme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Pokud limita existuje, pak o integrálu přirozeně říkáme, že **konverguje**.



Zobecněný Riemannův integrál

- Pro spojitou reálnou funkci f na \mathbb{R} zkoumejme limitu

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

Pokud tento součet limita existuje, nezávisí na c a je konečný, pak ho nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** a značíme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Pokud limita existuje, pak o integrálu přirozeně říkáme, že **konverguje**.

- Podobně můžeme postupovat v případě neomezených funkcí na otevřených intervalech. Např. pro $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$ klademe

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx := \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 x^{-1/2} dx = \lim_{a \rightarrow 0+} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_a^1 = 2.$$



Příklad.

Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$



Příklad.

Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 2 \int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\operatorname{arctg} x \right]_0^a = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg}(a) - 0) = \pi.$$



Gaussova křivka

Definice:

Graf funkce

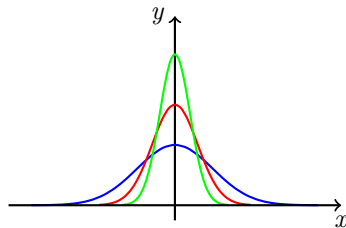
$$g_{\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad D_{g_{\sigma}} = \mathbb{R},$$

kde σ je kladný parametr, nazýváme **Gaussovou křivkou**.

Poznámka:

Numerické faktory jsou zvoleny tak, aby

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma}(x) dx = 1.$$



— $\sigma = 0.5$

— $\sigma = 0.3$

— $\sigma = 0.2$



Gaussovský filtr (1D)

Definice:

Buď dána f reálná funkce reálné proměnné. Položme

$$(\mathcal{G}_\sigma f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_\sigma(x - y) \, dy$$

pro všechna x pro která integrál konverguje.



Gaussovský filtr (1D)

Definition:

Buď dána f reálná funkce reálné proměnné. Položme

$$(\mathcal{G}_\sigma f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_\sigma(x - y) \, dy$$

pro všechna x pro která integrál konverguje.

- \mathcal{G}_σ chápeme jako zobrazení přiřazující funkci f novou funkci $\mathcal{G}_\sigma f$. \mathcal{G}_σ budeme nazývat **Gaussovským filtrem**.



Gaussovský filtr (1D)

Definition:

Buď dána f reálná funkce reálné proměnné. Položme

$$(\mathcal{G}_\sigma f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_\sigma(x - y) \, dy$$

pro všechna x pro která integrál konverguje.

- \mathcal{G}_σ chápeme jako zobrazení přiřazující funkci f novou funkci $\mathcal{G}_\sigma f$. \mathcal{G}_σ budeme nazývat **Gaussovským filtrem**.
- Předchozí definice a úvahy jsou poněkud vágní. Bylo by vhodné blíže specifikovat jaké funkce můžeme uvažovat (tj. definiční obor \mathcal{G}_σ). Touto otázkou se však nebudeme zabývat. Poznamenejme pouze, že je-li f po částech spojitá a v nekonečnech neroste rychleji než polynomiálně, pak je $(\mathcal{G}_\sigma f)(x)$ definováno pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{G}_\sigma f$ je spojitá funkce na \mathbb{R} .

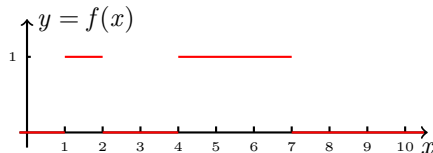


Příklad

Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2) \cup (4, 7), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vykreslíme $\mathcal{G}_\sigma f$ pro $\sigma \in \{0.4, 0.2, 0.1\}$.

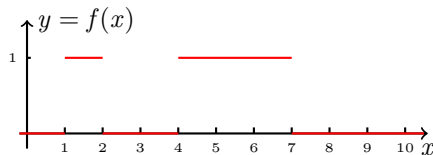


Příklad

Uvažme funkci

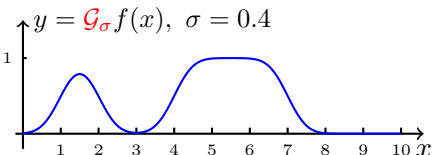
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2) \cup (4, 7), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vykreslíme $\mathcal{G}_\sigma f$ pro $\sigma \in \{0.4, 0.2, 0.1\}$.



Poznámka:

Z obrázku je zřejmě patrné, proč mluvíme o „rozmazávání“. Na dalším slidu si ukážeme další argument pro toto označení.



Příklad

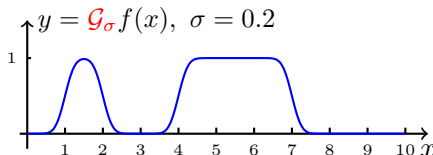
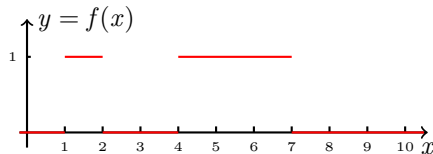
Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2) \cup (4, 7), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vykreslíme $\mathcal{G}_\sigma f$ pro $\sigma \in \{0.4, 0.2, 0.1\}$.

Poznámka:

Z obrázku je zřejmě patrné, proč mluvíme o „rozmazávání“. Na dalším slidu si ukážeme další argument pro toto označení.



Příklad

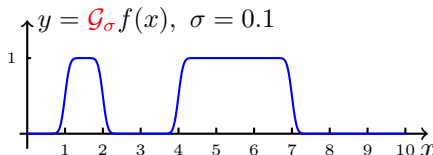
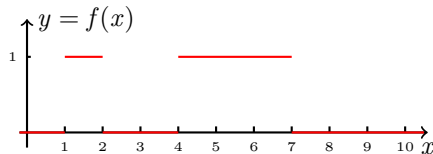
Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2) \cup (4, 7), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vykreslíme $\mathcal{G}_\sigma f$ pro $\sigma \in \{0.4, 0.2, 0.1\}$.

Poznámka:

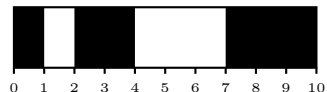
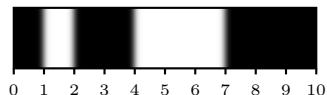
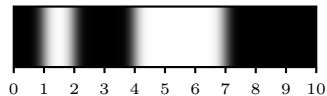
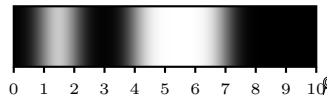
Z obrázku je zřejmě patrné, proč mluvíme o „rozmazávání“. Na dalším slidu si ukážeme další argument pro toto označení.



Interpretujme čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ jako **odstíny šedi** (nebo jako jeden z kanálů RGB). Necht 0 představuje černou a 1 bílou barvu.

Potom naši funkci f lze na intervalu $\langle 0, 10 \rangle$ znázornit pomocí černobílého pásku.

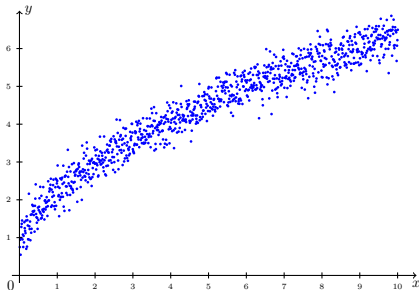
Akci Gaussova filtru pak interpretujeme jako „rozmazání“ původního obrázku (*Gaussian blur*).

Původní funkce f Po aplikaci filtru s $\sigma = 0.1$  $\sigma = 0.2$  $\sigma = 0.4$ 

Vyhlazování dat

Druhou možnou aplikací Gaussova filtru je vyhlazování různých dat zatížených šumem (např. pro uživatelskou oku lahodící prezentaci grafů).

Původní data



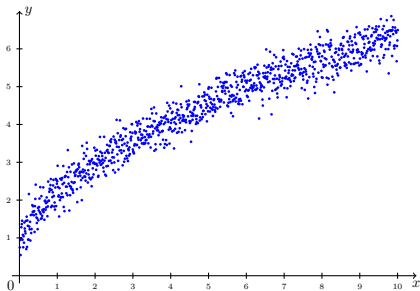
Poznámka: K efektivní implementaci Gaussova filtru se využívá rychlé Fourierovy transformace (FFT).



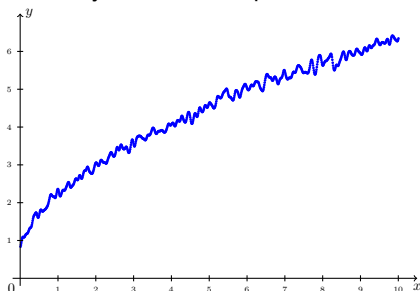
Vyhlazování dat

Druhou možnou aplikací Gaussova filtru je vyhlazování různých dat zatížených šumem (např. pro uživatelskou oku lahodící prezentaci grafů).

Původní data



Vyhlazená data pro $\sigma = 3$



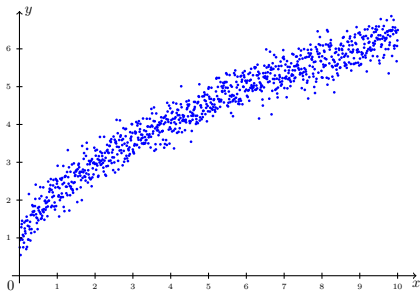
Poznámka: K efektivní implementaci Gaussova filtru se využívá rychlé Fourierovy transformace (FFT).



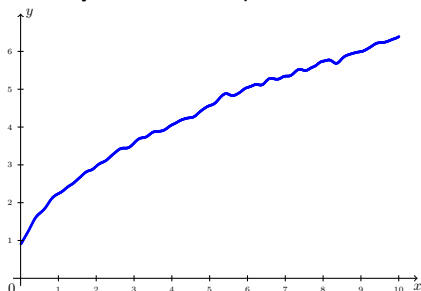
Vyhlazování dat

Druhou možnou aplikací Gaussova filtru je vyhlazování různých dat zatížených šumem (např. pro uživatelskou oku lahodící prezentaci grafů).

Původní data



Vyhlazená data pro $\sigma = 10$



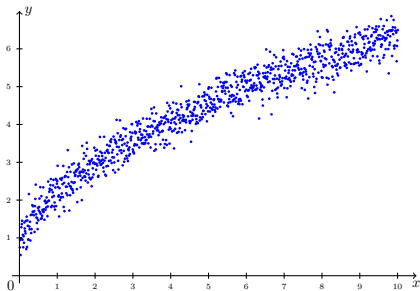
Poznámka: K efektivní implementaci Gaussova filtru se využívá rychlé Fourierovy transformace (FFT).



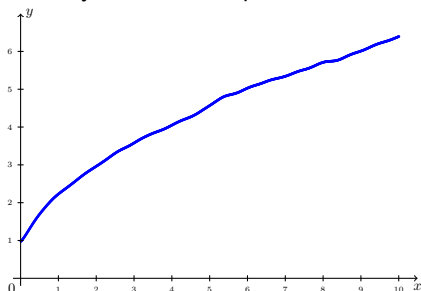
Vyhlazování dat

Druhou možnou aplikací Gaussova filtru je vyhlazování různých dat zatížených šumem (např. pro uživatelskou oku lahodící prezentaci grafů).

Původní data



Vyhlazená data pro $\sigma = 20$



Poznámka: K efektivní implementaci Gaussova filtru se využívá rychlé Fourierovy transformace (FFT).

